Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
et Informatique

Filières : SMA, SMI, SMC, SMP

EXERCICES D'ALGÈBRE II

EXAMENS DES ANNÉES UNIVERSITAIRES :
03-04, 04-05, 05-06

PAR : A. HAÏLY

I - Examen du deuxième semestre 03-04.

Exercice 1. (sur 14 points)

On considère la matrice à coefficients réels :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ -1 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

1 - Calculer le déterminant de M.

2 - Montrer que : $\det M = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{1, -2\}$.

3 - Discuter suivant les valeurs de α, le rang de M.

4 - On suppose que $\alpha = 0$. Montrer que M est inversible puis calculer M^{-1}.

5 - Discuter et résoudre suivant les valeurs du paramètre m le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = m \end{cases}$$

6 - On prend $\alpha = 1$.

a - Calculer M^2 et montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $M^2 = \lambda M$.

b - Calculer M^k, où k est un entier naturel ≥ 2.

Exercice 2. (sur 6 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note com (A) la comatrice de A. On se propose de calculer le rang de com(A) en fonction

de celui de A. Montrer que :

1 - si rg$A = n$, alors rg com $(A) = n$.

2 - si rg$A = n-1$, alors rg com $(A) = 1$.

3 - si rg$A < n-1$, alors com(A) est la matrice nulle.

Solution de l'exercice 1.

1 - On a det $M = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ -1 & -\alpha & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2-C_3}{=} \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & -1 \\ \alpha+2 & 1 & -\alpha \\ -\alpha-2 & -\alpha & 1 \end{vmatrix}$

$\overset{L_2-L_1, L_3+L_1}{=} \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha+1 \\ 0 & -\alpha+1 & 0 \end{vmatrix}$

D'où det$M = (\alpha-1)^2(\alpha+2)$.

2 - D'après **1**, det$M = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 = 0$ ou $(\alpha+2) = 0$. Par conséquent, det$M = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{1, -2\}$.

3 - Etude du rang de M :

• Si $\alpha \notin \{1, -2\}$, alors det$M \neq 0$, ce qui implique que M est inversible, son rang est alors égal à 3.

• Si $\alpha = 1$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $c_2 = c_1$ et $c_3 = -c_1$. Il s'ensuit que rg$M = 1$.

• Si $\alpha = -2$, det $M = 0$, $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On a det $M = 0$, par suite rg$M \leq 2$. Le mineur extrait de M $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Donc rg$M \geq 2$. D'où rg$M = 2$.

4 - Pour $\alpha = 0$, on a det$M = 2$ (remplacer α par 0 dans l'expression det$M = (\alpha-1)^2(\alpha+2)$). Dans ce cas là, det$M \neq 0$, ce qui entraîne que M est inversible.

On peut déterminer M^{-1} en résolvant le système général :

$MY = X$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

On a $Y = M^{-1}X \Leftrightarrow X = MY \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} & y_2 & -y_3 & = & x_1 \\ y_1 & +y_2 & & = & x_2 \\ -y_1 & & +y_3 & = & x_3 \end{array} \right.$

$$\overset{E_1+E_2+E_3}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2y_2 & & & = & x_1+x_2+x_3 \\ y_1 & +y_2 & & = & x_2 \\ -y_1 & & +y_3 & = & x_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y_2 & = & \frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3) \\ y_1 & = & x_2-y_2 = \frac{1}{2}(-x_1+x_2-x_3) \\ y_3 & = & x_3+y_1 = \frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3) \end{array} \right.$$

Donc $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(On vérifie bien que $MM^{-1} = I_3$).

5 - La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice M pour $\alpha = -2$, qui est de rang 2. La matrice extraite $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est une matrice carré d'ordre

2 inversible extraite de M, c'est donc une matrice principale.

Le système est compatible, si et seulement si, le determinant $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & m \end{vmatrix}$ est nul. On a $\Delta \overset{(C_3-C_2)}{=} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & m-2 \end{vmatrix}$. D'où $\Delta = -3(m-2)$. Ainsi $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

• Si $m \neq 2$, (S) est incompatible et l'ensemble solution est vide.

• Si $m = 2$, (S) est compatible et d'après la théorie générale (S) peut être résolu en considérant les équations principales avec les inconnues principales, les autres inconnues jouent le rôle de paramètre On a alors :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x_1 & + & x_2 & = & 1+x_3 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1-2x_3 \end{array} \right.$$

Dans lequel x_3 joue le rôle d'un paramètre.

L'ensemble solution est alors $S = \{(-x_3, 1-x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$

Remarques.

1 - On aurait pu choisir deux autres inconnues principales par exemple x_1 et x_3.

2 - On peut aussi résoudre le système directement par élimination successives des inconnues. On obtient un système triangulaire dont on peut déduire à la fois les conditions de compatibilité et les solutions.

6 - a - pour $\alpha = 1$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors : $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3.M$.

b - Montrons par récurrence que $M^k = 3^{k-1}M$.

C'est vrai pour $k = 2$. Supposons l'égalité vraie pour $k > 2$, on a $M^{k+1} = M^k M = 3^{k-1}M.M = 3^{k-1}M^2 = 3^k M$. D'où le résultat.

Solution de l'exercice 2.

1 - Si $\text{rg}A = n$, $\det A \neq 0$ et A est inversible. Puisque ${}^t\text{com}A = \det A.A^{-1}$, on a ${}^t\text{com}A$ est aussi inversible. Donc $\text{com}A$ est inversible, d'où $\text{rg}(\text{com}A) = n$.

2 - Si $\text{rg}A = n - 1$ on a $\det A = 0$. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A et g celle associée à ${}^t\text{com}A$. Puisque $A.{}^t\text{com}A = \det A.I_n = 0$. On a $f \circ g = 0$. Donc $\text{Im}g \subset \text{Ker}f$. Or $\dim\text{Ker}f = n - \dim\text{Im}f = n - \text{rg}f = n - \text{rg}A = n - (n-1) = 1$

Comme $\text{Im}g \subset \text{Ker}f$, on a $\dim\text{Im}g = 0$ ou 1. Or $g \neq 0$ car A possède au moins un mineur d'ordre $n - 1$ non nul. Donc $\dim\text{Im}g = 1$. d'où $\text{rg}{}^t\text{Com}A = 1$.

3 - Si $\text{rg}A < n - 1$, tous les mineurs d'ordre $n - 1$ de A sont nuls. Or $\text{com}A$ est justement formée par ces mineurs. Donc $\text{com}A = 0$.

II - Examen de rattrapage 03-04.

Exercice 3. (sur 7 points)

On considère le système linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} mx_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -m \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & mx_3 & = & m \end{array} \right.$$

1 - Déterminer, suivant les valeurs du paramètre m, le rang du système S.

2 - Pour quelles valeurs de m, S est-il un système de Cramer ?

3 - Discuter et résoudre S.

Exercice 4. (sur 13 points)

On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des paramètres réels.

1 - Calculer le déterminant de M.

2 - Etudier suivant les valeurs de a et b, le rang de M.

3 - Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $J^2 = 2I_3 + J$, où I_3 est la matrice identique d'ordre 3.

4 - En écrivant $M = aI_3 + bJ$, montrer qu'il existe α et β dans $\mathbb{R}$, tels que $M^2 = \alpha I_3 + \beta M$.

5 - Calculer M^{-1} lorsqu'elle existe.

6 - Soit $\mathcal{B} = ((1,0,0);(0,1,0);(0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère le système de vecteurs $\mathcal{B}' = ((1,-1,0);(1,0,-1);(1,1,1))$.

a - Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b - Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

c - Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = M$. Calculer $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}')$.

Solution de l'exercice 3.

1 - la matrice du système est $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & m \end{pmatrix}$

Son déterminant est $\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & m-4 \end{vmatrix} = (m-4)(1-m)$

• Si $m \notin \{1,4\}$, $\det A$ est non nul, donc M est inversible. Son rang est égal à 3.

• Si $m = 1$ ou $m = 4$, $\det A = 0$, donc $\mathrm{rg} A < 3$ Le mineur, extrait de A, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Donc $\mathrm{rg} A = 2$.

2 - Le système (S) est de Cramer si $\det A \neq 0$, donc si $m \notin \{1,4\}$.

3 - • Si $m \notin \{1,4\}$, le système (S) est de Cramer et possède donc une solution unique (x_1, x_2, x_3) avec :

$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$ $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$, où $\Delta = \det A = (m-4)(1-m)$ et

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -m & -1 & 1 \\ m & -4 & m \end{vmatrix} \overset{c_3+c_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -m & -1 & 0 \\ m & -4 & m-4 \end{vmatrix} = (m-4)(m-1)$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ -1 & -m & 1 \\ 2 & m & m \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2}{=} \begin{vmatrix} m+1 & 1 & -1 \\ -1-m & -m & 1 \\ 2+m & m & m \end{vmatrix} \overset{l_1+l_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1-m & 0 \\ -1-m & -m & 1 \\ 2+m & m & m \end{vmatrix}.$$

En developpant par rapport à la première ligne on trouve :
$\Delta_y = (1-m)(m^2+2m+2)$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -m \\ 2 & -4 & m \end{vmatrix} \overset{c_1+c_3}{=} \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ -1-m & -1 & -m \\ 2+m & -4 & m \end{vmatrix} \overset{l_1+l_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-m \\ -1-m & -1 & -m \\ 2+m & -4 & m \end{vmatrix}$$

$\Delta_{x_3} = (1-m)(5m+6)$.

La solution du système est donc $(x_1, x_2, x_3) = (-1, \frac{m^2+2m+2}{m-4}, \frac{5m+6}{m-4})$.

• Si $m = 1$, le rang est égal à 2, le système n'est pas de Cramer.

$$(S) \sim \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right. \overset{E_2-2E_1}{\sim} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & - & 6x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array} \right. .$$

D'où $x_2 = \frac{1}{6}(1+x_3)$ et $x_1 = \frac{5}{6}(1+x_3)$, (x_3 jouant le rôle d'un paramètre).

L'ensemble solution est alors : $S = \{(\frac{5}{6}(1+x_3), \frac{1}{6}(1+x_3), x_3) \in \mathbb{R}^3\}$.

• Si $m = 4$, le rang est égal à 2, le système n'est pas de Cramer.

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\overset{4E_2+E_1, 2E_3-E_1}{\sim} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -15 \\ & - & 9x_2 & + & 9x_3 & = & 9 \end{array} \right.$$

$$\overset{E_3-3E_2}{\sim} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -15 \\ & & & & 0 & = & 54(!) \end{array} \right.$$

Le système est donc incompatible. $S = \varnothing$

Solution de l'exercice 4.

1 - $\det M = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} a+2b & b & b \\ a+2b & a & b \\ a+2b & b & a \end{vmatrix} \overset{l_2-l_1, l_3-l_1}{=} \begin{vmatrix} a+2b & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} =$
$(a+2b)(a-b)^2$.

2 - $\det M = 0 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -2b$.

• Si $a \neq b$ et $a \neq 2b$, $\det M \neq 0$, donc M est inversible et $\mathrm{rg} M = 3$.

• Si $a = b$ et $a = 2b$, on a $a = b = 0$ et $M = 0$ donc $\text{rg}M = 0$.

• Si $a = b$ et $a \neq 0$ $M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$, on a $l_1 = l_2 = l_3$, et $M \neq 0$. Donc $\text{rg}M = 1$

• Si $a = -2b$ et $a \neq 0$, le mineur d'ordre 2 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a-b)(a+b) \neq 0$.

Donc $\text{rg}M \geq 2$. Comme M n'est pas inversible, $\text{rg}M < 3$. D'où $\text{rg}M = 2$.

3 - $J^2 = J.J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + J$.

4 - $M = aI_3 + bJ$. Donc on a :

$M^2 = (aI_3 + bJ)^2 = a^2I_3 + b^2J^2 + 2abJ = a^2I_3 + b^2(2I_3 + J) + 2abJ$.

D'où, $M^2 = a^2I_3 + 2b^2I_3 + b(M - aI_3) + 2a(M - aI_3)$ car $bJ = M - aI_3$.

Finalement, $M^2 = (-a^2 + 2b^2 - ab)I_3 + (b+2a)M = (b-a)(a+2b)I_3 + (b+2a)M$.

On prend $\alpha = (b-a)(a+2b)$ et $\beta = (b+2a)$.

Remarque : on peut déterminer α et β en calculant M^2 directement et en l'identifiant à $\alpha I_3 + \beta M$.

5 - M est inversible $\Leftrightarrow \det M \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b$ et $a \neq -2b$.

En multipliant l'égalité $M^2 = (b-a)(a+2b)I_3 + (b+2a)M$ par M^{-1} on obtient

$$M^{-1} = \frac{1}{(b-a)(a+2b)}(M - (b+2a)I_3)$$

On trouve après calculs :

$$M^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a+2b)} \begin{pmatrix} a+b & -b & -b \\ -b & a+b & -b \\ -b & -b & a+b \end{pmatrix}$$

Remarque : On peut aussi utiliser la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,{}^t\text{com}M$

6 - a - La matrice du système $\mathcal{B}'$ dans la base canonique est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_2+l_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b - La matrice P précédente et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Calcul de P^{-1}.

On a $P^{-1}X = Y \Leftrightarrow PY = X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} y_1 & + & y_2 & + & y_3 & = & x_1 \\ -y_1 & & & + & y_3 & = & x_2 \\ & - & y_2 & + & y_3 & = & x_3 \end{array} \right.$

$\overset{E_1+E_2+E_3}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrcrcr} & & & 3y_3 & = & x_1 + x_2 + x_3 \\ -y_1 & & + & y_3 & = & x_2 \\ & -y_2 & + & y_3 & = & x_3 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} y_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \\ y_1 = \frac{1}{3}(x_1 - x_2 + x_3) \\ y_2 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 - 2x_3) \end{array} \right.$

D'où $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c - D'près les formules de changement de base, on a :

$\text{Mat}(u, \mathcal{B}') = P^{-1}MP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} a-b & 2b-2a & a-b \\ a-b & a-b & 2b-2a \\ a+2b & a+2b & a+2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}$

III - Examen du deuxième semestre 04-05.

Exercice 5. (sur 7 points)

On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ \alpha & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, où α est un paramètre réel.

1 - Déterminer suivant les valeurs de α, le rang de M.

2 - Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}'$ celle de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, telle que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = M$.

a - Montrer que f n'est pas injective, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

b - Pour quelles valeurs de α, f est-elle surjective ?

c - On suppose que $\alpha = 1$. Déterminer une base de $\text{Im} f$ et une base de $\text{Ker} f$.

Exercice 6. (sur 13 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

On pose $B = A - I$, où I est la matrice identique d'ordre 3.

1 - Calculer B, B^2, puis montrer que $B^k = B$ pour tout entier $k \geq 1$.

2 - En posant $A = I + B$, calculer A^k.

3 - Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ tels que $A^2 + aA + bI = 0$.

4 - Déduire de la question n°3 que A est inversible et calculer A^{-1}.

5 - Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a - Montrer que Q est inversible.

b - Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AQ = QD$ et que $Q^{-1}AQ = D$.

6 - Etudier suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice $A - \lambda I$.

Solution de l'exercice 5.

1 - Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ \alpha & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

on a rg$M \overset{l_1+l_2, l_3-\alpha l_1}{=}$ rg $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 2-2\alpha & 3-3\alpha \end{pmatrix} \overset{2c_2-c_3}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2\alpha & 3-3\alpha \end{pmatrix}$.

Ainsi on a : si $\alpha \neq 1$, rg$M = 3$

si $\alpha = 1$ rg$M = 2$

2 -

On a : dimKer$f = 4 - dimImf = 4 - rgf = 4 - rgM = 1ou2$ donc f ne peut pa être injective

b - f est surjective, si et seulement si, rg$f = 3$. Donc si et seulement si, $\alpha \neq 1$.

c - Si $\alpha = 1$, on a dim$Imf = 2$ et dimker$f = 4 - dimImf = 2$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. $f(e_1) = (1, -1, 1)$ et $f(e_2) = (1, 0, 1)$, $f(e_1), f(e_2) \in Imf$ et sont linéairement indépendants. Puisque dim$Imf = 2$, $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de Imf.

Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a : $(x, y, z, t) \in$ Ker$f \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & +3t & = 0 \\ -x & & -z & -2t & = 0 \\ x & +y & +2z & +3t & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrl} x & +y & = -2z - 3t \\ -x & & = z + 2t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -z - 2t \\ y = -z - t \end{array} \right.$$

Donc $u \in Kerf \Leftrightarrow u = (-z - 2t, -z - t, z, t) = z(-1, -1, 1, 0) + t(-2, -1, 0, 1)$.

On pose $u_1 = (-1, -1, 1, 0)$, $u_2 = (-2, -1, 0, 1)$, alors $u_1, u_2 \in kerf$ et sont linéairement indépendants. Donc (u_1, u_2) est une base de Ker$f$.

Solution de l'exercice 6.

Soit la matrice **1** - $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

par recurrence on a : $B^{k+1} = B^k B = B.B = B$.

2 - D'après la formule du binôme on a : $A^k = (I + B)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m I^{k-m} B^m$.

Puique $B^0 = I$, et $B^m = B \forall m \geq 1$, on a : $A^k = I + (\sum_{m=1}^{k} C_k^m) B = I + (2^k - 1)B$.

3 - D'après 2, on a= $A^2 = I + 3B = I + 3(A - I) = -2I + 3A$. Ainsi : $A^2 - 3A + 2I = 0$.

4 - On a : $2I = 3A - A^2 = A(3I - A)$. Par conséquent $A(\frac{1}{2}(3I - A)) = I$. Il s'ensuit que A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$

5 - Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a - on a : $\det Q = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Donc Q est inversible.

b - On a $AQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = QD$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On $AQ = QD$ donc $Q^{-1}AQ = Q^{-1}QD = D$.

6 - $\text{rg}A - \lambda I = \text{rg}Q^{-1}(A - \lambda I)Q = \text{rg}(Q^{-1}AQ - Q^{-1}\lambda IQ) = \text{rg}(D - \lambda I)$.

On ainsi $\text{rg}(A - \lambda I) = \begin{cases} 3, & \text{si } \lambda \notin \{1, 2\} \\ 2, & \text{si } \lambda = 1 \\ 1, & \text{si } \lambda = 2. \end{cases}$

IV - Examen de rattrapage 04-05.

Exercice 7. (sur 10 points)

On considère le système linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + mx_3 = m \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

On note A la matrice du système.

1 - Calculer le déterminant de A.

2 - Montrer que (S) est un système de Cramer, si et seulement si, $m \notin \{0, 5\}$.

3 - Discuter suivant les valeurs de m le rang de (S).

4 - Discuter et résoudre le système dans les cas suivants :
a - $m \notin \{0, 5\}$
b - $m = 0$
c - $m = 5$

Exercice 8. (sur 10 points)

On considère la matrice : $N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1 - Calculer N^2 et montrer que $N^3 = 0$.

2 - Calculer $(I - N)(I + N + N^2)$, où I est la matrice identique d'ordre 3.

3 - On considère la matrice $B = I - N$. Montrer que B est inversible et calculer B^{-1}.

4 - Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de E tel que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = N$.

a - Déterminer une base de $\text{Im} f$ et une base de $\text{Ker} f$.

b - Soit u un vecteur de E tel que $f \circ f(u) \neq 0_E$. On pose $v = f(u)$ et $w = f(v)$. Montrer que le système $\mathcal{B}' = (w, v, u)$ est une base de E et déterminer $\text{Mat}(f, \mathcal{B}')$.

Solution de l'exercice 7.

1 - la matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ -2 & 2 & m \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

On a : $\det A = \begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ -2 & 2 & m \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} m & m & -1 \\ m & 2 & m \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{l_2-l_1}{=} \begin{vmatrix} m & m & -1 \\ 0 & 2-m & m+1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = m(m-5)$

2 - On a : (S) est un système de Cramer, si et seulement si, $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \notin \{0, 5\}$.

3 -

• Si $m \notin \{0, 5\}$, A est inversible, donc son rang est égal à 3.

• Si $m = 0$ ou $m = 5$, $\det A = 0$. Donc, $\text{rg}A < 3$. Le mineur $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.
Donc $\text{rg}A = 2$.

4

• Si $m \notin \{0, 5\}$, le système est de Cramer. S possède donc une seule solution (x_1, x_2, zx_3) donnée par : $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$ et $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$.

Où $\Delta = m(m-5)$ est le déterminant du système et :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & m & -1 \\ m & 2 & m \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{c_1+2c_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & m & -1 \\ 3m & 2 & m \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3m(2m-1)$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & m & m \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{c_2+2c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3m & m \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3m$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ -2 & 2 & m \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{c_2-c_1, c_3-4c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & m-1 & -2 \\ -2 & 4 & m+8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = m(m+7)$$

d'où

$$S = \{(\frac{3(2m-1)}{m-5}, -\frac{3}{m-5}, \frac{m+7}{m-5})\}$$

b - Si $m = 0$, le rang du système est 2 et

$$(S) : \begin{cases} x_1 \quad - x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + \quad = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 - 2 \\ x_1 + x_1 - 2(x_1 - 2) = 4 \end{cases}$$

Le système est donc compatible et $S = \{(x_1, x_2, x_1 - 2) \in \mathbb{R}^3\}$.

Si $m = 5$, le rang du système est 2 et on a :

$$(S):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2\\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 5\\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4\end{array}\right.$$

$$\overset{e_2+2e_1,e_3-e_1}{\sim}\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2\\ & & 12x_2 & + & 3x_3 & = & 9\\ & & -4x_2 & - & x_3 & = & 2\end{array}\right.$$

$$\overset{3e_3+e_2}{\sim}\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2\\ & & 12x_2 & + & 3x_3 & = & 9\\ & & & & 0 & = & 15\end{array}\right.$$

Le système est donc incompatible , $S=\varnothing$

Solution de l'exercice 8.

1 - $N^2 = N.N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -2\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -2\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ -4 & -4 & -4\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}$
$N^3 = N^2.N = 0.$

2 - $(I-N)(I+N+N^2) = I+N+N^2-N-N^2-N^3 = I.$

3 - Soit $B = I-N$. On a $B(I+N+N^2) = I$, donc B est iversible et $B^{-1} = I+N+N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1\\ -2 & -5 & -6\\ 3 & 7 & 8\end{pmatrix}$.

4 -

a - On a dim$Imf = rgf = rgN$, et puisque $N^3=0$, N n'est pas inversible. Par suite rg$N<3$. Les deux premieres colonnes de N étant linéairement indépendantes, on a rg$f=2$. Considérons les vecteurs $u_1 = f(e_1) = (-1,2,1), u_2 = f(e_2) = (-1,-2,3)$, alors (u_1,u_2) est une base de Imf.

On a dimKer$f=1$. Soit $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a : $v\in$ Ker$f \Leftrightarrow NX=0 \Leftrightarrow$
$\left\{\begin{array}{rrr} -x & -y & -z=0\\ 2x & -2y & -2z=0\\ -x & +3y & +3z=0\end{array}\right. \overset{E_2-2E_1}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{array}{r} x=0\\ z=-y\end{array}\right.$
D'où $v=(0,y,-y)=y(0,1,-1)$. Le vecteur $v_1=(0,1,-1)$ engendre Ker$f$.

b - Montrons que le système $\mathcal{B}'=(w,v,u)$ est libre. Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, tels que $\alpha w+\beta v+\gamma u = 0_E$ $(*)$. Puisque $N^3=0$, on $f\circ f\circ f=0$
On applique alors $f\circ f$ à l'égalité $*$. $f\circ f(w)=0_E$, $f\circ f(v)=0_E$. Donc $\gamma f\circ f(u)=0_E$. Or $f\circ f(u)\neq 0_E$ Donc $\gamma=0$. Il reste $\alpha w+\beta v=0_E$ $(**)$. On applique f à $**$, on obtient $\beta f(v)=\beta f\circ f(u)=0_E$. Donc $\beta=0$. Finalement, $\alpha w=0_E$. Donc $\alpha=0$.

$\mathcal{B}'=(w,v,u)$ est un système libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a $f(w)=0_E, f(v)=w, f(u)=v$. D'où Mat$(f,\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

V - Examen du deuxième semestre 05-06.

Exercice 9. (sur 14 points)

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ 3 & \alpha - 4 & 6 \\ 2 & -2 & \alpha + 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où α est un paramètre réel.

1 - Calculer le déterminant de A.

2 - Montrer que : $\det A = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{1, -1\}$.

3 - Calculer le rang de A en fonction de α.

4 - On suppose que $\alpha = 0$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

5 - Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, défini par :

$$f(x, y, z) = (-x - y + 2z,\ 3x - 5y + 6z,\ 2x - 2y + 2z)$$

a - Montrer que f n'est pas bijectif.

b - Déterminer une base de $\text{Im} f$ et une base de $\text{Ker} f$.

c - Discuter et résoudre le système (S) : $f(x, y, z) = (1, m, 0)$, où m est un paramètre réel.

Exercice 10. (sur 6 points)

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M \neq 0$ et $M^3 + M = 0$.

1 - Montrer que $M^2 + I_3 \neq 0$.

2 - Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $I_3 + \lambda M$ est inversible. Déterminer alors son inverse en fonction de M.

3 - Soit E l'espace des vecteurs colonnes de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. On considère $u \in E$ tel que $Mu \neq 0_E$ et $M^2 u \neq -u$. On pose $v = Mu$ et $w = M^2 u$.

a - Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de E.

b - Soit ϕ l'endomorphisme de E canoniquement associé à M. Déterminer $\text{Mat}(\phi, \mathcal{B})$.

Solution de l'exercice 9.

1 - $\det A = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ 3 & \alpha-4 & 6 \\ 2 & -2 & \alpha+3 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2}{=} \left(\begin{array}{lll} \alpha-1 & -1 & 2 \\ \alpha-1 & \alpha-4 & 6 \\ 0 & -2 & \alpha+3 \end{array} \right|$

$\overset{L_2+L_1}{=} \left(\begin{array}{lll} \alpha-1 & -1 & 2 \\ 0 & \alpha-43 & 6 \\ 0 & -2 & \alpha+3 \end{array} \right| = (\alpha-1)(\alpha^2-9+8) = (\alpha-1)(\alpha^2-1) =$ $(\alpha-1)^2(\alpha+1)$

2 - $\det A = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{1, -1\}$.

3 - • si $\alpha \notin \{1, -1\}$, $\det A \neq 0$. Donc $\text{rg}A = 3$.

• Si $\alpha = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. On a $C_2 = -C_1$ et $C_3 = 2C1$. Donc $\text{rg}A = 1$.

• Si $\alpha = -1$ $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. On a d'après **2**, A n'est pas inversible, par suite $\text{rg}A < 3$. Comme le mineur extrait de A, $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 8$
est non nul, on a $\text{rg}A = 2$.

4 - Si $\alpha = 0$, $\det A = 1 \neq 0$. par conséquent A est inversible. Pour calculer A^{-1}, on applique la méthode habituelle qui consisteà résoudre un système linéaire général.

On a $A^{-1}X = Y \Leftrightarrow AY = X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} & -y_2 & +2y_3 & = & x_1 \\ 3y_1 & -4y_2 & +6y_3 & = & x_2 \\ 2y_1 & -2y_2 & +3y_3 & = & x_3 \end{array} \right.$

$\overset{E_2-2E_3}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & -x_2+2x_3 \\ -y_2+2y_3 & = & x_1 \\ -2y_2+3y_3 & = & 2x_2-3x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & -x_2+2x_3 \\ y_2 & = & 3x_1-4x_2+6x_3 \\ y_3 & = & 2x_1-2x_2+3x_3 \end{array} \right.$. Ainsi,
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (Remarquer que pour $\alpha = 0$ on a : $A^{-1} = A$!).

5 -
a - La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, c'est la matrice A pour $\alpha = -1$ Comme A n'est pas inversible pour $\alpha = -1$, il s'ensuit que f n'est pas bijectif.

b - On a $\dim \text{Im} f = rgA = 2$, et $\dim \text{Ker} f = 3 - 2 = 1$.

Les deux premières colonnes de B sont linéairement indépendantes, donc le système $((-1,3,2), (-1,-5,-2))$ est une base de $\text{Im} f$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $u \in \text{Ker}f \Leftrightarrow f(u) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllll} -x & -y & +2z & = & 0 \\ 3x & -5y & +6z & = & 0 \\ 2x & -2y & +2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} -x & -y & +2z & = & 0 \\ 3x & -5y & +6z & = & 0 \end{array}\right.$$

car on a deux inconnues et deux équations principales, la troisième étant une combinaison des deux autres.

On finalement, $u \in \text{Ker}f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2x \\ y = 3x \end{array}\right.$

Donc $u \in \text{Ker}f \Leftrightarrow u = (x, 3x, 2x) = x(1, 3, 2)$

c - Le système est compatible, si et seulement si, le vecteur $(1, m, 0)$ est un vecteur de $\text{Im}f$.

Ce qui est équivalent à : $\left|\begin{array}{lll} -1 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & m \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right| = 0$

on a : $\left|\begin{array}{lll} -1 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & m \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{lll} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & m \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right| = -4(m-1).$

Donc le système est compatible, si et seulement si, $m = 1$.

Ainsi lorsque $m = 1$, S : $\left\{\begin{array}{llllll} -x & -y & +2z & = & 1 \\ 3x & -5y & +6z & = & 1 \\ 2x & -2y & +2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} -x & -y & +2z & = & 1 \\ 3x & -5y & +6z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \frac{1}{2}(z-1) \\ y & = & \frac{1}{2}(1-6z) \end{array}\right.$

Par suite, l'ensemble solution est $S = \{(\frac{1}{2}(z-1), \frac{1}{2}(1-6z), z) \in \mathbb{R}^3\}$.

Solution de l'exercice 10.

1 - Supposons que $M^2 + I_3 = 0$, on a $M^2 = -I_3 = 0$. En considérant les déterminants on aura $\text{det}M^2 = (\text{det}M)^2 = \text{det} - I_3 = -1$. Ce qui est impossible (le carré d'un nombre réel étant toujours positif.

2 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et X un vecteur colonne non nul tel que $(I_3 + \lambda M)X = 0$. On a alors : $\lambda MX = -X$. En multipliant par M à gauche, on obtient $\lambda M^2X = -MX$. En multipliant par λM on obtient $\lambda^2 M^3 X = -\lambda^2 MX = MX$. Donc $(1+\lambda^2)MX = 0$, d'où $MX = 0$ Il en résulte que $X = 0$. $I_3 + \lambda M$ est inversible.

Notons P l'inverse de $I_3 + \lambda M$. On a $P(I + \lambda M) = I$. Donc $P + \lambda PM = I$, $PM + \lambda PM^2 = M$, $PM^2 + \lambda PM^3 = PM^2 - \lambda PM = M^2$

On a $(1 + \lambda^2)PM = M - \lambda M^2$, d'où $P = I - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}(M - \lambda M^2)$.

3 -

a - Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Appliquons M on a $\alpha Mu + \beta Mv + \gamma Mw = \alpha v + \beta w - \gamma v = (\alpha - \gamma)v + \beta w = 0$

Donc $\alpha = \gamma$ et $\beta = 0$. Il reste $\alpha(u + M^2u) = 0$, comme $(u + M^2u) \neq 0$ on a $\alpha = 0$.
3 sur $\mathbb{R}$. On considère $u \in E$ tel que $Mu \neq 0_E$ et $M^2u \neq -u$. On pose $v = Mu$ et $w = M^2u$.

b - Soit ϕ l'endomorphisme de E canoniquement associé à M. $\phi(u) = v$, $\phi(v) = w$, $\phi(w) = -u$. Par conséquent, $\mathrm{Mat}(\phi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

VI - Examen de rattrapage 05-06.

Exercice 11. (sur 12 points)

Sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f représenté dans la base canonique de E par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

1 - Calculer $(A - 2I_3).A$, et en déduire l'expression de $(f - 2Id_E) \circ f$, où Id_E désigne l'application identique de E.

2 - Montrer que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.

3 - Montrer que $\forall y \in \mathrm{Im} f$, on a $f(y) = 2y$.

4 - Déterminer le rang de f.

5 - Soient u_1, u_2 deux vecteurs linéairement indépendants quelconques de $\mathrm{Im} f$, et u_3 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker} f$. On pose $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$.

Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E, et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 12. (sur 8 points)

Soit $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. On considère une matrice $A \in V$ fixée et on définit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & V & \longrightarrow & V \\ & M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

1 - Montrer que ϕ est un endomorphisme de V.

2 - ϕ est-il injectif ? surjectif ? Justifier.

3 - Montrer que $\forall M, N \in V$, $\phi(MN) = \phi(M).N + M.\phi(N)$.

4 - Montrer que $\forall M, N \in \text{Ker}\phi$, on a $MN \in \text{Ker}\phi$.

5 - On suppose que $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer une base de $\text{Ker}\phi$ et une base de $\text{Im}\phi$.

Solution de l'exercice 11.

1 - On a $(A - 2I_3).A = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ -4 & 8 & 6 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} = 0$
par suite, $(f - 2Id_E) \circ f$ est l'application nulle.
2 - $\forall y = f(x) \in \text{Im}f$. On a : $(f - 2Id_E)(y) = 0_E$. Donc, $y \in \text{Ker}(f - 2Id_E)$.
Il en résulte que $\text{Im}f \subset \text{Ker}(f - 2Id_E)$.

3 - $\forall y \in \text{Im}f$, on a $(f - 2Id_E)(y) = 0_E$, donc $f(y) = 2y$.

4 - Puisque $\text{Im}f \subset \text{Ker}(f - 2Id_E)$, $\text{Im}f \neq \mathbb{R}^3$, f n'est donc pas surjective. Il en résulte que $\text{rg}f \leq 2$. Comme le mineur d'ordre 2 $\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, $\text{rg}f \geq 2$. D'où $\text{rg}f = 2$.

5 - Soient u_1, u_2 deux vecteurs linéairement indépendants quelconques de $\text{Im}f$, et u_3 un vecteur non nul de $\text{Ker}f$. On pose $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$.

Montrons que $\mathcal{C}$ est un système libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_E$. On compose par f, on a $\alpha f(u_1) + \beta f(u_2) + \gamma f(u_3) = f(0_E) = 0_E$. Or $f(u_1) = 2u_1$, $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = 0_E$
Donc $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_E$, $u_1, u_2)$ étant libre on a $\alpha = \beta = 0$, il reste $\gamma u_3 = 0_E$, donc $_gamma = 0$.

$\mathcal{C}$ est libre formé de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, donc c'est une base.

une base de E, et déterminer la matrice de f dans cette base.
$f(u_1) = 2u_1$, $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = 0_E$, par conséquent
$\text{Mat}(f, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 12.

Soit $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. On considère une matrice $A \in V$ fixée et on définit l'application :

$$\begin{array}{cccc} \phi : & V & \longrightarrow & V \\ & M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

1 - Soient $M, N \in V$ $\alpha\beta \in \mathbb{R}$. On a :

$\phi(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A = \alpha(AM - MA) + \beta(AN - NA)$

Par conséquent $\phi(\alpha M + \beta N) = \alpha\phi(M) + \beta\phi(N)$.

ϕ est un endomorphisme de V.

2 - ϕ n'est pas injectif car $\phi(I) = 0$, où I est la matrice identique. Comme ϕ est un endomorphisme, il n'est pas surjectif.

3 - $\forall M, N \in V$, on $\phi(MN) = AMN - MNA = AMN - MAN + MAN - MNA = (AM - MA)N + M(AN - NA) = \phi(M).N + M.\phi(N)$.

4 - $\forall M, N \in \text{Ker}\phi$, on a $\phi(MN) = \phi(M).N + M.\phi(N) = 0$, donc $MN \in \text{Ker}\phi$.

5 - On prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$
$AM - MA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t-x \\ 0 & -z \end{pmatrix}$

Donc $\phi(M) = 0 \Leftrightarrow t = x, z = 0$.

Par suite $\text{Ker}\phi = \{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in V\} = \text{Sev} < I, A >$. (I, A) est une base de $\text{Ker}\phi$, d'où $\text{dimKer}\phi = 2$.

On a $\text{dimIm}\phi = \text{dim}V - \text{dimKer}\phi = 4-2 = 2$ Les matrices $\phi(\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J$ et $\phi(\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ sont linéairement indépendantes et appartiennent $\text{Im}\phi$. Donc (J, A) est une base de $\text{Im}\phi$.